Flachschule Narrenhochburg
University of Denied Sciences

https://www.prof-mueller.net/noteninflation

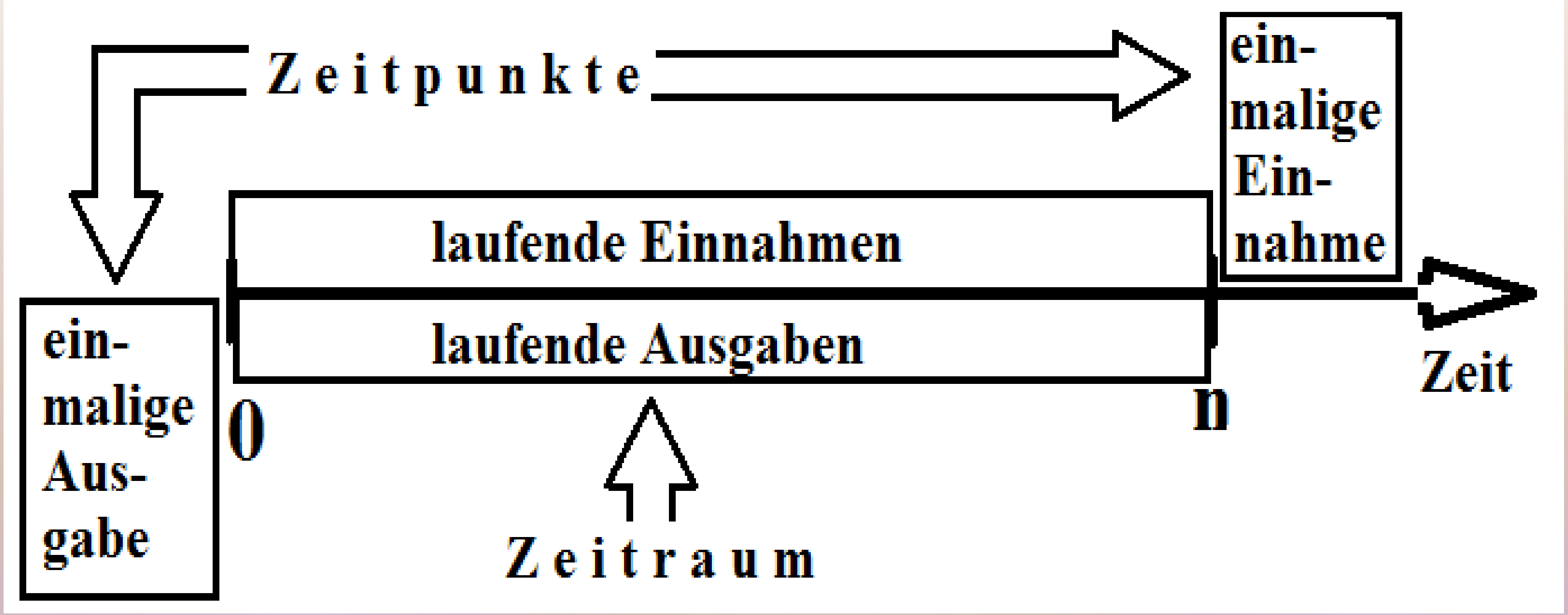
Prof. Dr. Werner M ü l l e r

Investition und Finanzierung

https://www.prof-mueller.net/beruf/investition-und-finanzierung/

6. mathematische Grundlagen dynamischer Verfahren

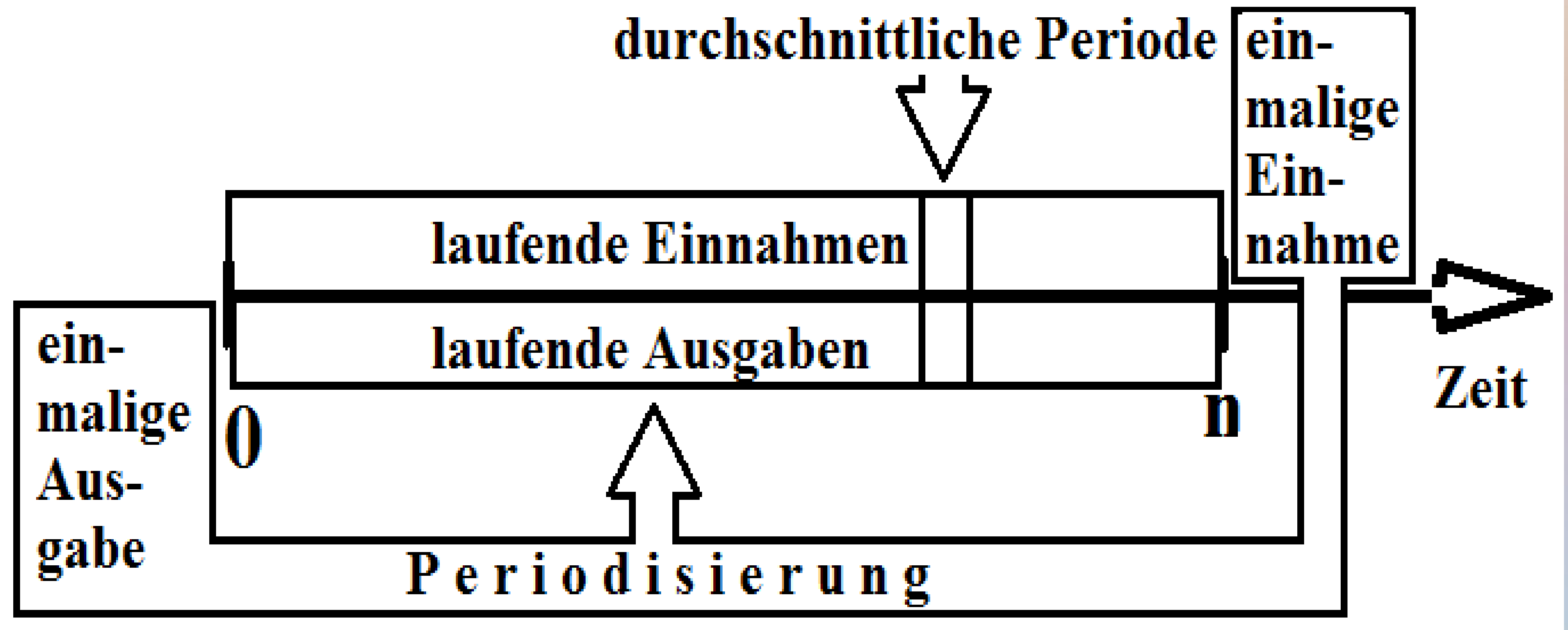
Zeitpunkt-Zeitraum-Problem



- Anschaffungskosten + Restwert => Zeitpunkte
- lfd. Einnahmen und Ausgaben => Zeitraum
- nicht vergleichbar => anpassen

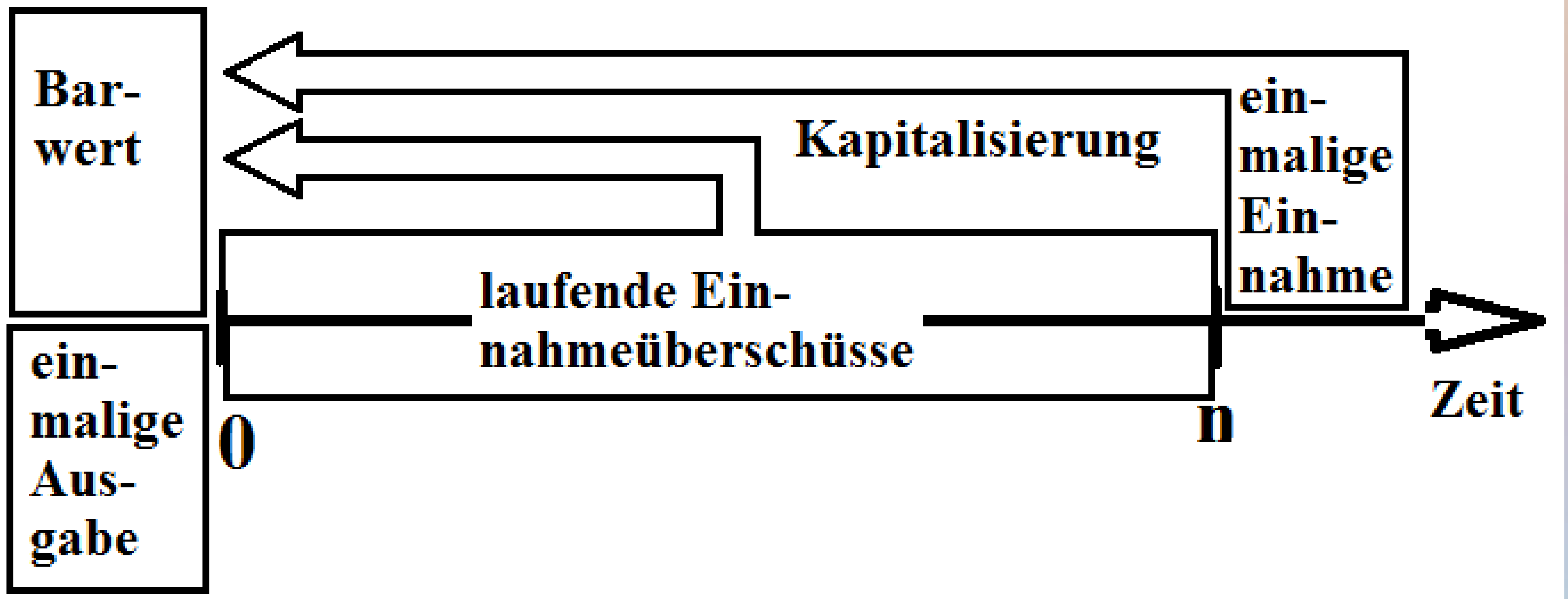
statische Verfahren

- Zeitpunkte auf Zeiträume verteilen = Periodisierung
- fiktive durchschnittliche Periode als Modell



dynamische Verfahren

- Zeitraum zu Zeitpunkt => Kapitalisierung
- zukünftige Einnahmen und Ausgaben auf jetzigen Wert abzinsen / auch den Restwert



dynamische Verfahren

- von Zeitraum zu Zeitpunkt
- Investitionszeitpunkt = Gegenwartswert

dynamische Verfahren

- von Zeitraum zu Zeitpunkt
- Investitionszeitpunkt = Gegenwartswert
- abzinsen
- mathematisch komplex

Aufzinsung

Jahr	Anf.kap.	1 % Zi.	Endkap.
1	1.000,00	10,00	1.010,00

Aufzinsung

Jahr	Anf.kap.	1 % Zi.	Endkap.	
1	1.000,00	10,00	1.010,00	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{1}$

Aufzinsung

Jahr	Anf.kap.	1 % Zi.	Endkap.	
1	1.000,00	10,00	1.010,00	$= 1.000 \cdot 1{,}01^1$
2	1.010,00	10,10	1.020,10	$= 1.000 \cdot 1{,}01^2$

Aufzinsung

Jahr	Anf.kap.	1 % Zi.	Endkap.	
1	1.000,00	10,00	1.010,00	$= 1.000 \cdot 1{,}01^1$
2	1.010,00	10,10	1.020,10	$= 1.000 \cdot 1{,}01^2$
3	1.020,10	10,20	1.030,30	$= 1.000 \cdot 1{,}01^3$
4	1.030,30	10,30	1.040,60	$= 1.000 \cdot 1{,}01^4$
5	1.040,60	10,41	1.051,01	$= 1.000 \cdot 1{,}01^5$

Aufzinsung

Jahr	Anf.kap.	1 % Zi.	Endkap.	
1	1.000,00	10,00	1.010,00	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{1}$
2	1.010,00	10,10	1.020,10	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{2}$
3	1.020,10	10,20	1.030,30	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{3}$
4	1.030,30	10,30	1.040,60	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{4}$
5	1.040,60	10,41	1.051,01	$= 1.000 \cdot 1{,}01^{5}$

$$\text{Endkapital} = \text{Anfangskapital} \cdot (1 + \text{Zinssatz})^{\text{Jahre}}$$

Formel + Symbole

Laufzeit (in Jahren)

Endkapital im letzten Jahr

Anfangskapital im ersten Jahr

Zinssatz in dezimaler Schreibweise

Formel + Symbole

Laufzeit (in Jahren)	$= n$
Endkapital im letzten Jahr	$= K_n$
Anfangskapital im ersten Jahr	$= K_0$
Zinssatz in dezimaler Schreibweise	$= i$

Formel + Symbole

Laufzeit (in Jahren)	$= n$
Endkapital im letzten Jahr	$= K_n$
Anfangskapital im ersten Jahr	$= K_0$
Zinssatz in dezimaler Schreibweise	$= i$

Ausgangsformel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Umformung

- Ausgangsformel für Aufzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Umformung

- Ausgangsformel für Aufzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- gesucht wird Anfangskapital zum Zeitpunkt der Investition

Umformung

- Ausgangsformel für Aufzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- gesucht wird Anfangskapital zum Zeitpunkt der Investition
- Umformung nach K_0

Umformung

- Ausgangsformel für Aufzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- gesucht wird Anfangskapital zum Zeitpunkt der Investition
- Umformung nach K_0

$$K_0 = K_n : (1 + i)^n$$

Raten aufzinsen + summieren

Jahr	Anf.kap.	Rate	1 % Zinsen	Endkap.
1	0,00	1.000,00	0,00	1.000,00

Raten aufzinsen + summieren

Jahr	Anf.kap.	Rate	1 % Zinsen	Endkap.
1	0,00	1.000,00	0,00	1.000,00
2	1.000,00	1.000,00	10,00	2.010,00

Raten aufzinsen + summieren

Jahr	Anf.kap.	Rate	1 % Zinsen	Endkap.
1	0,00	1.000,00	0,00	1.000,00
2	1.000,00	1.000,00	10,00	2.010,00
3	2.010,00	1.000,00	20,10	3.030,10

Raten aufzinsen + summieren

Jahr	Anf.kap.	Rate	1 % Zinsen	Endkap.
1	0,00	1.000,00	0,00	1.000,00
2	1.000,00	1.000,00	10,00	2.010,00
3	2.010,00	1.000,00	20,10	3.030,10
4	3.030,10	1.000,00	30,30	4.060,40
5	4.060,40	1.000,00	40,60	5.101,00

Lösungsansatz

geometrische Reihe:

Lösungsansatz

geometrische Reihe:

Jahr	Endkap.
1	1.000,00
2	2.010,00
3	3.030,10
4	4.060,40
5	5.101,00

Lösungsansatz

geometrische Reihe:

Jahr	Endkap.	Erhöhung
1	1.000,00	1.000,00
2	2.010,00	1.010,00
3	3.030,10	1.020,10
4	4.060,40	1.030,30
5	5.101,00	1.040,60

Lösungsansatz

geometrische Reihe:

Jahr	Endkap.	Erhöhung	
1	1.000,00	1.000,00	
2	2.010,00	1.010,00	
3	3.030,10	1.020,10	je
4	4.060,40	1.030,30	1 %
5	5.101,00	1.040,60	mehr

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
Σ	31

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3
1	1	1
2	2	3
3	4	9
4	8	27
5	16	81
Σ	31	121

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3	4
1	1	1	1
2	2	3	4
3	4	9	16
4	8	27	64
5	16	81	256
Σ	31	121	341

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3	4	5
1	1	1	1	1
2	2	3	4	5
3	4	9	16	25
4	8	27	64	125
5	16	81	256	625
Σ	31	121	341	781

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6
3	4	9	16	25	36
4	8	27	64	125	216
5	16	81	256	625	1.296
Σ	31	121	341	781	1.555

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6
3	4	9	16	25	36
4	8	27	64	125	216
5	16	81	256	625	1.296
Σ	31	121	341	781	1.555
f^5	32	243	1.024	3.125	7.776

Gesetzmäßigkeit

Reihe beginnt mit 1, multipliziert mit f, Summe

n / f	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6
3	4	9	16	25	36
4	8	27	64	125	216
5	16	81	256	625	1.296
Σ	31	121	341	781	1.555
f^5	32	243	1.024	3.125	7.776
f-1	1	2	3	4	5

- $\dfrac{f^n - 1}{f - 1}$ $\dfrac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\dfrac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\dfrac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\dfrac{5^5 - 1}{5 - 1}$

- $\frac{f^n - 1}{f - 1}$ $\frac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\frac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\frac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\frac{5^5 - 1}{5 - 1}$
- $\frac{32 - 1}{2 - 1}$ $\frac{243 - 1}{3 - 1}$ $\frac{1.024 - 1}{4 - 1}$ $\frac{3.125 - 1}{5 - 1}$

- $\frac{f^n - 1}{f - 1}$ $\quad \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\quad \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\quad \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\quad \frac{5^5 - 1}{5 - 1}$
- $\frac{32 - 1}{2 - 1}$ $\quad \frac{243 - 1}{3 - 1}$ $\quad \frac{1.024 - 1}{4 - 1}$ $\quad \frac{3.125 - 1}{5 - 1}$
- $= 31$ $\quad = 121$ $\quad = 341$ $\quad = 781$

- $\frac{f^n - 1}{f - 1}$ $\frac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\frac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\frac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\frac{5^5 - 1}{5 - 1}$
- $\frac{32 - 1}{2 - 1}$ $\frac{243 - 1}{3 - 1}$ $\frac{1.024 - 1}{4 - 1}$ $\frac{3.125 - 1}{5 - 1}$
- $= 31$ $= 121$ $= 341$ $= 781$

- bei Verzinsung: $f = (1 + i)$

- $\frac{f^n - 1}{f - 1}$ $\frac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\frac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\frac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\frac{5^5 - 1}{5 - 1}$
- $\frac{32 - 1}{2 - 1}$ $\frac{243 - 1}{3 - 1}$ $\frac{1.024 - 1}{4 - 1}$ $\frac{3.125 - 1}{5 - 1}$
- $= 31$ $= 121$ $= 341$ $= 781$
- bei Verzinsung: $f = (1 + i)$
- $K_n = \text{Rate}$ □ $\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1}$ (Klammer auflösen)

- $\frac{f^n - 1}{f - 1}$ $\quad \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$ $\quad \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$ $\quad \frac{4^5 - 1}{4 - 1}$ $\quad \frac{5^5 - 1}{5 - 1}$
- $\frac{32 - 1}{2 - 1}$ $\quad \frac{243 - 1}{3 - 1}$ $\quad \frac{1.024 - 1}{4 - 1}$ $\quad \frac{3.125 - 1}{5 - 1}$
- $= 31$ $\quad = 121$ $\quad = 341$ $\quad = 781$
- bei Verzinsung: $f = (1 + i)$
- $K_n = \text{Rate} \;\square\; \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i) - 1}$ (Klammer auflösen)
- $K_0 = \text{Rate} \;\square\; \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \;\square\; \frac{1}{(1 + i)^n}$

Formelsammlung

Auf- und Abzinsung:

- Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$
- Anfangskapital: $K_0 = K_n : (1 + i)^n$

Formelsammlung

Auf- und Abzinsung:

- Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$
- Anfangskapital: $K_0 = K_n : (1 + i)^n$

Auf- und Abzinsungssumme (endfällig):

- Endkapital: $K_n = \text{Rate} \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$
- Anfangskapital: $K_0 = \text{Rate} \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n}$

Formeln II:

Auf- und Abzinsungssumme (vorfällig):

- Endkapital: $K_n = \text{Rate} \; \Box \dfrac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i}$

Formeln II:

Auf- und Abzinsungssumme (vorfällig):

- Endkapital: $K_n = \text{Rate} \cdot \dfrac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i}$
- Anfangskap.: $K_0 = \text{Rate} \cdot \dfrac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i \cdot (1 + i)^n}$

Formeln II:

Auf- und Abzinsungssumme (vorfällig):

- Endkapital: $$K_n = \text{Rate} \cdot \frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i}$$
- Anfangskap.: $$K_0 = \text{Rate} \cdot \frac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i \cdot (1 + i)^n}$$
- Umwandlung: (endfällig) $$\text{Rate} = K_0 \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$